| | | |
|---|---|---|
| **LPM** 2010/2011 | **SUITE REELLE** | **Prof: MOHAMED BENZINA** |
| | **MATHEMATIQUE** | **Classe 3A** |

## EXERCICE N° 1 :

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$ , $U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 3}{U_n + 3}$ .

1°/ a) Démontrer, par récurrence, que $\forall\ n \in IN,\ 0 \leq U_n \leq 3$.

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

2°/ a) Démontrer que pour tout $n \in IN$, on a : $3 - U_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}(3 - U_n)$

b) En déduire que pour tout $n \in IN$, on a : $0 \prec 3 - U_n \leq 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

4°/ On pose $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$ pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que $V_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Exprimer $(V_n)$ puis $(U_n)$ en fonction de n.

c) Calculer la limite de $(U_n)$ quand n tend vers $+\infty$

## EXERCICE N° 2 :

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $U_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3U_n^2 + 4}$ .

1°/ a) Démontrer, par récurrence, que $\forall\ n \in IN,\ 0 \leq U_n \leq 2$.

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

2°/ On pose la suite $V_n = U_n^2 - 4$ pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que $V_n$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b) Exprimer $(V_n)$ puis $(U_n)$ en fonction de n.

c) Calculer la limite de $(U_n)$ quand n tend vers $+\infty$

3°/ a) Montrer que $U_n - 2 = \dfrac{V_n}{U_n + 2}$ et déduire que $\dfrac{1}{U_n + 2} \leq \dfrac{1}{3}$ pour tout $n \in IN$.

b) Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in IN$ on a : $|U_n - 2| \leq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

4°/ Soit $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k^2$ . Calculer $S_n$ en fonction de n.

## EXERCICE N° 3 :

Soit $\alpha$ un nombre réel appartenant à l'intervalle$]0, 1[$.

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_n = \dfrac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n} \end{cases}$ .

1°/ a) Monter , par récurrence , que pour tout $n \in IN$ , on a : $U_n \geq 1$ .

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est décroissante .

2°/ Soit la suite $V_n$ définie sur IN par $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$ pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que $V_n$ est une suite géométrique de raison $\alpha$ .

b) Exprimer ( $V_n$ ) en fonction de n et $\alpha$ .En déduire l'expression de ( $U_n$ ) en fonction de n et $\alpha$ .

c) Calculer alors la limite de ( $U_n$ ) quand n tend vers $+\infty$ .

## ***EXERCICE N° 4 :***

On considère la suite u définie par: pour tout $n \in IN^*$, $U_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

1°/ a) Démontrer que la suite u est décroissante et minoré.

b) Montrer que $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{3}{4}$, pour tout $n \geq 2$.

2°/ a) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + \dfrac{1}{2^n}$.

b) On définit une suite S par : $\forall$ n $\in$ IN*; $S_n = 1 + \dfrac{2}{2^1} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{4}{2^3} + ... + \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

* Démontrer que $\forall$ n $\in$ IN* : $S_n = -U_n + 4\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

* Montrer que $S_n \leq 4$.

## ***EXERCICE N° 5 :***

Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $V_n = \dfrac{U_n}{\sqrt{n}}$ .

1°/ a) Montrer que pour tout $k \in IN^*$, on a: $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, on a: $U_n - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2 \leq U_{n-1}$ ,

et que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1$ .

2°/ Soit $W_n$ la suite définie sur IN* par : $W_n = U_n - 2\sqrt{n}$ .

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a: $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2 \leq W_n \leq -1$.

b) Etudier le sens de variation de $W_n$ .

## ***EXERCICE N° 6 :***

Soit la suite réelle $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par : $U_1 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et pour tout $n \in IN^*$ , $U_{n+1} = U_n(1 - U_{n+1})$ .

1°/ a) Démonter, par récurrence, que $\forall$ n $\in$ IN*, $0 < U_n \leq \dfrac{1}{2}$ .

b) Démontrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante .

2°/ a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

(On pourra utiliser les variations de la fonctions f définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x) = x(1 - x)$ ).

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3°/ Soit $V_n$ la suite définie sur IN* par $V_n = nU_n$.

Montrer que la suite $(V_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante